1) $n\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = n\mathbb{Z}$

$n\mathbb{Z} = \{n.z : z \in \mathbb{Z}\}$

$\left.\begin{array}{l} A = \{nz : z > 0\} \\ B = \{nz : z < 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow n\mathbb{Z} = A \cup B \cup \{0\}$

A sayılabilir mi?

$f : A \longrightarrow \mathbb{N}$
$nz \longmapsto f(nz) = z$

• $\forall\, x, y \in A$ için $x = y \Rightarrow nz_1 = nz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_1, z_2 > 0$

$\Rightarrow nz_1 - nz_2 = 0$

$\Rightarrow n(z_1 - z_2) = 0$

$\Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow f(nz_1) = f(nz_2)$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$

∴ f iyi tanımlıdır.

• $\forall\, x, y \in A$ için $f(x) = f(y) \Rightarrow z_1 = z_2$

$\Rightarrow nz_1 = nz_2 \Rightarrow x = y$

∴ f 1-1 dir.

• $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $\exists\, x \in A \ni f(x) = k$ olup f örtendir.

∴ A sayılabilirdir.

$g : B \longrightarrow \mathbb{N}$
$nz \longmapsto f(nz) = -z$ şeklinde tanımlayıp

aynı işlemleri uygularsak B kümesi de sayılabilir olur.

Sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir olduğundan

$n\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$ sayılabilirdir.

2) $(3a-b, 3a+b) = d \Rightarrow d \mid 3a-b,\ d \mid 3a+b$

$\Rightarrow d \mid 3a-b+3a+b,\ d \mid 3a+b-(3a-b)$

$\Rightarrow d \mid 6a,\ d \mid 2b$

$\Rightarrow d \mid 6a,\ d \mid 6b$

$(a,b)=1 \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{Z} \ni ax+by=1$

$\Rightarrow 6ax+6by=6$ --- (*)

$\left.\begin{array}{l} d \mid 6a \\ d \mid 6b \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 6ax,\ d \mid 6by$

$\Rightarrow d \mid 6ax+6by \xrightarrow[(*)]{} d \mid 6$

$\underset{d>0}{\Rightarrow} d=1 \vee 2 \vee 3 \vee 6$

3) $(qp)^* = q^* p^*$ olduğunu biliyoruz.

$(rp)^* = r^* p^*$

$(qp)^* < (rp)^* \Rightarrow q^* p^* < r^* p^*$

$\underset{p^*>0^*}{\Rightarrow} q^* < r^*$

$\Rightarrow q < r$

4) • $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $f(a)=f(b)$ olsun.

$a = \frac{a}{1} = [(a,1)]$

$b = \frac{b}{1} = [(b,1)]$

$f(a)=f(b) \Rightarrow [(a,1)] = [(b,1)] \Rightarrow a.1 = b.1$

$\Rightarrow a=b$

$\therefore$ f, 1-1 dir.

• $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$f(a+b) = \frac{a+b}{1} = [(a+b,1)]$

$= [(a.1+1.b,\ 1.1)]$

$= [(a,1)] \oplus [(b,1)]$

$= \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = f(a)+f(b)$

$\therefore$ f, toplamayı korur.

• $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$f(a\cdot b) = \frac{a\cdot b}{1} = [(ab, 1)]$$
$$= [(a\cdot b, 1\cdot 1)]$$
$$= [(a,1)] \odot [(b,1)]$$
$$= \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1} = f(a)\cdot f(b)$$

$\therefore$ f, çarpmayı korur.

5) • $\forall a \in \mathbb{Z}^+$ alalım:

$\Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{N} \ni a = [m,n] \in \mathbb{Z}^+,\ m>n$ dır.

$n<m \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* \ni m = n+k$ dır.

$$a = [m,n] = [n+k, n] = [n+k, n+0] = [n,n]+[k,0]$$
$$= [k,0]$$

$k\in\mathbb{N}^*$ olduğundan $k>0$ dır.

$0<k \Rightarrow 0+1<k+1$

$\Rightarrow 1<k+1$

$$a = [k,0] = [k,0]+[1,1] = [k+1, 1] \in X$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^+ \subseteq X$ ... ①

• $\forall x \in X$ alalım.

$\Rightarrow x = [a+1, 1] = [a+1, 0+1] = [a,0]+[1,1]$
$= [a,0]$

$a\in\mathbb{N}^*$ olduğundan $a>0$ dır.

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow X \subseteq \mathbb{Z}^+$ ... ②

① ve ② den $X = \mathbb{Z}^+$ bulunur.